Filiere – Semestre : SEG S2
Ensmble : E4 et E5

ALGEBRE LINEAIRE

SUITE DE DEUXIEME CHAPITRE
APPLICATIONS LINEAIRES

Exemples

1- Soit $a \in E$. L'application $f: x \in E \rightarrow ax \in E$ est une application linéaire. En effet,

$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x + y) = a(x + y) = (ax) + (ay) = f(x) + f(y)$.

En revanche, l'application $f: x \in E \rightarrow ax^2 \in E$ n'est pas linéaire car

$f(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + (y)^2 + 2xy \neq f(x) + f(y)$ si $x \neq 0$ et $y \neq 0$

2-Lapplication $f: (x,y) \in IR^2 \rightarrow x + y \in IR$ est une application linéaire.

B- Opérations sur les applications linéaires

Théorème :
L'ensemble L(E,F) des applications linéaires définies de E vers F , muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel réel.

B-1 Addition

Si f et g sont deux applications linéaires, définies de E vers F , alors l'application f + g, définie de E vers F par

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),$$ est une application linéaire.

B-2 Multiplication par un scalaire

Si f est une application linéaire définie de E vers F et α un réel, alors l'application (αf) définie de E vers F par .

$$(\alpha f)(x) = \alpha (f)(x)$$ est une application linéaire.

B-3 Composition de deux applications linéaires

Soient E , F et G trois espaces vectoriels réels.

• Si f est une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de F vers G , alors l'application g o f est une application linéaire de E vers G .

C- Image et image réciproque par une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels réels et f est une application linéaire de E vers F .

Définitions :

Soit A un sous ensemble de E. On **appelle l'image** de A par f, et on note f(A) l'ensemble :

$$f(A) = \{ f(x) / x \in A\}$$

Soit B un sous ensemble de F. On appelle l'image réciproque de B par f, et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{ x \in A / f(x) \in B\}$$

Théorèmes :

-Si A est un sous espace vectoriel de E, alors f(A) est un sous espace vectoriel de F.
-Si B est un sous espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(B)$ est un sous espace vectoriel de E.

Théorèmes :

-L'image d'un système générateur d'un sous espace vectoriel A de E est un système générateur du sous espace vectoriel f(A) de F.
-L'image par f d'un système lié est un système lié.
-Si l'image par f d'un système est libre alors ce système est libre.

D- Noyau et image d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels réels et f est une application linéaire de E vers F .

Définitions :

-On appelle l'image de f , et on note Im(f) , l'image de E par f :

$$Im(f) = f(E) = \{ f(x) / x \in E \}$$

-On appelle le noyau de f et on note Ker(f), l'image réciproque de $\{0_F\}$ par f :

$$Ker(f) = f^{-1}(0_F) = \{ x \in E \ / \ f(x) = 0_F \}$$

Théorèmes :

- Im(f) est un sous espace vectoriel de F.
- Ker(f) est un sous espace vectoriel de E.

Démonstration :
Montrons que Ker(f) ≠ ∅
-Pour tout x appartenant à E et puisque f est linéaire on a :
$f(x) - f(x) = 0_F = f(x- x) = f(0_E)$. On en déduit que 0_E appartient à Ker (f). donc Ker(f) n'est pas vide.
-Soient x_1 , x_2 deux vecteurs de Ker(f) et α ,β deux scalaires. Montrons que le vecteur $\alpha x_1 + \beta x_2$ appartient à Ker(f). Utilisant la linéarité de f on a :
$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = \alpha 0_F + \beta 0_F = 0_F$
Le vecteur $\alpha x_1 + \beta x_2$ a ainsi pour image par le vecteur nul.

Théorème :
Im (f) est le sous espace vectoriel de F engendré par l'image d'une base quelconque de E.

E- Applications linéaires injectives et surjectives

E un espace vectoriel réel de dimension n et F un espace vectoriel réel de dimension p.
f une application linéaire de E vers F.

Théorèmes :
-f est injective si et seulement si Ker(f) = $\{0_E\}$

Démonstration :
Supposons f injective et montrons que Ker f = $\{0_E\}$.
Soit x un vecteur appartenant au noyau de f. Le vecteur x appartient ainsi à E et vérifie f(x) = 0_F. Remarquons que le vecteur 0_F est l'image par f du vecteur 0_E. Ainsi, f(x) = f(0_E) et on en déduit que x = 0_E car f est injective, montrant ainsi que l'unique élément du noyau est le vecteur nul.
Réciproquement, supposons Ker f = $\{ 0_E \}$ et déduisons-en que f est injective.
Considérons deux vecteurs x et y de E tels que f(x) = f(y) et montrons que x =y. On a les équivalences :
$f(x) = f(y) \leftrightarrow f(x - y) = 0_F \leftrightarrow x - y \in \mathrm{Ker}(f)$. Le noyau Ker(f) étant réduit au vecteur nul, on a nécessairement $x - y = 0_E$, c'est-à-dire x =y.

-f est surjective si et seulement si Im(f) = F
-f est bijective, dim E = dim F si et seulement si f est injective si et seulement si f est surjective

Corollaires :
-Si l'application linéaire f est injective alors dim E $\leq$ dim F.
-Si l'application linéaire f est surjective alors dim E $\geq$ dim F.
-Si l'application linéaire f est bijective alors dim E = dim F.

F- Rang d'une application linéaire

Définition :
Soit E et F deux espaces vectoriels réels de dimension fini et soit f une application linéaire de E vers F . On appelle le rang de l'application linéaire f, et on note rg(f), la dimension de l'image de f :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$$

Théorème : Soit E et F deux espaces vectoriels réels de dimension fini.
Si f est une application linéaire de E vers F , alors :

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f) + rg(f)$$

Théorèmes : Soit E et F deux espaces vectoriels réels de dimension fini.
Si f est une application linéaire de E vers F , alors :
-f est injective si et seulement si $rg(f) = \dim(E)$
-f est surjective si et seulement si $rg(f) = \dim(F)$
-f est bijective si et seulement si $rg(f) = \dim(E) = \dim(F)$

FIN

LE PROCHAIN CHAPITRE
LES MATRICES